Algebra vettoriale

Vettori

I programmi di disegno assistito dal calcolatore o CAD si basano sull'algebra vettoriale, un metodo geometrico normalmente utilizzato in fisica.
Un vettore è un segmento orientato, rappresentato graficamente da una freccia, definita da due punti A,B.
Il primo punto A definisce il punto di applicazione del vettore, il secondo punto B corrisponde alla punta della freccia.
La distanza AB è detta modulo del vettore.

Se il punto di applicazione coincide con l'origine O, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e i vettori uscenti da O, per cui si possono considerare i punti come vettori con punto di applicazione nell'origine: P ≡ (x,y,z) equivale al vettore OP.
Il modulo del vettore OP vale:

│**OP**│=sqr (x^2+ y^2+ z^2) **modulo del vettore OP≡P≡ (x,y,z)**

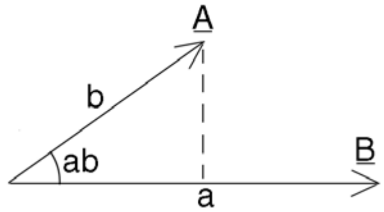
Per un vettore AB con A≡ (xa,ya,za), B≡ (xb,yb,zb), il modulo risulta:

sqr ((xb−xa)^2+ (yb−ya)^2+ (zb−za)^2) **modulo del vettore AB≡B-A≡ (xb-xa , yb-ya , zb-za)**

Due vettori possono essere sommati, o sottratti, con la regola del parallelogramma. Prima si traslano i vettori in modo da avere un unico punto di applicazione, poi si considera il parallelogramma da essi individuato. La somma vettoriale è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma.
Dato che l'inverso del vettore è lo stesso vettore con senso contrario, per avere la differenza si somma il vettore dato con l'opposto dell'altro.
Dal punto di vista algebrico queste operazioni corrispondono alla somma o alla sottrazione delle relative coordinate che individuano il punto o il vettore.
Moltiplicare un vettore per un numero, o prodotto di un vettore per uno scalare, significa allungarlo in proporzione a quel valore, operazione che si traduce nel moltiplicare per quel fattore le singole coordinate.

Più complesso è il prodotto tra due vettori, esistono infatti due tipi di prodotto:
il prodotto scalare, che dà luogo a un numero,
il prodotto vettoriale, che fornisce un nuovo vettore.

Il **prodotto scalare** tra due vettori A, B si ricava dalla proiezione ortogonale di un vettore sull'altro. La misura ottenuta va poi moltiplicata per il modulo di quest'ultimo. Il prodotto scalare si ricava dunque dal prodotto dei moduli a,b per il coseno dell'angolo ab formato dai due vettori: **A*B=a*b*cos(ab)**
Se i due vettori hanno il centro di applicazione nell'origine:
OA≡ (xa,ya,za), OB≡ (xb,yb,zb),
si può dimostrare la relazione::



OA∗OB ≡ (xa,ya,za)∗(xb,yb,zb) = xa∗xb + ya∗yb + za∗zb

Per cui detto ab l'angolo formato dai due vettori risulta:
cos(ab)= (xa∗xb+ ya∗yb+ za∗zb)/(sqr(xa^2+ ya^2+ za^2)∗ sqr(xb^2+ yb^2+ zb^2))

ovvero:
ab=acs((xa*xb+ ya*yb+ za*zb)/(sqr(xa^2+ ya^2+ za^2)*sqr(xb^2+ yb^2+ zb^2))
formula che ci restituisce l' **angolo tra i due vettori OA≡ (xa,ya,za), OB≡ (xb,yb,zb)**.

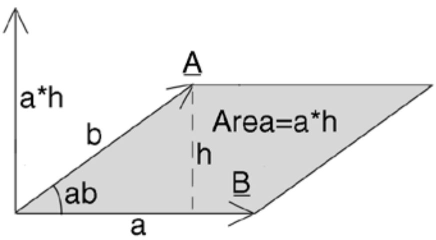
Se i vettori fossero ortogonali, tale angolo è nullo e deve risultare:
xa*xb+ ya*yb+ za*zb=0

Se i due vettori si trovano sul piano xy, si esprimono come:
OA≡ (xa,ya,0), OB≡ (xb,yb,0),
pertanto risultano ortogonali tra loro se:
xa*xb=- ya*yb ovvero: xa/ya=-yb/xb

Il **prodotto vettoriale** fornisce un vettore ortogonale al piano definito dai due vettori A,B dati:
il suo verso segue la regola della mano destra, il pollice rappresenta il primo vettore, l'indice il secondo, il medio il vettore prodotto.
Il modulo è definito dall'area del parallelogramma individuato dai due vettori A,B e vale il prodotto dei moduli a,b per il seno dell'angolo ab da essi compreso: a*b*sin(ab).
Le coordinate del prodotto vettoriale OA^OB=OC sono:

xc=ya*zb-za*yb
yc=za*xb-xa*zb
zc=xa*yb-ya*xb

prodotto vettoriale di (xa,ya,za) con (xb,yb,yb)



Come molte formule di geometria, queste formule sono circolari, nel senso che ciascuna si ricava dalla precedente considerando x,y,z come segnate su un cerchio, in modo che y segue x, z segue y, x segue z e così via.

Se OA e OB si trovano su xy risulta zc=sin(al)* (sqr(xa^2+ya^2)*sqr(xb^2+yb^2))
sin (al)= (xa*yb-ya*xb)/ (sqr(xa^2+ya^2)*sqr(xb^2+yb^2))

Se poi OA e OB sono ortogonali dovrà risultare:
xa*yb-ya*xb= sqr(xa^2+ya^2)*sqr(xb^2+yb^2)

Viene definito **versore** un vettore con modulo unitario. Esso si può ricavare da un vettore dato V=(vx,vy,vz), dividendo per il modulo del vettore medesimo:
ux= vx / sqr(vx^2+ vy^2+ vz^2)
uy= vy / sqr(vx^2+ vy^2+ vz^2)
uz= vz / sqr(vx^2+ vy^2+ vz^2) **u ≡ (ux,uy,uz) versore della direzione di V ≡ (vx,vy,vz)**

I versori degli assi cartesiani solitamente in fisica si indicano con i=(1,0,0), j=(0,1,0), k=(0,0,1).
Questa notazione permette di memorizzare la formula del prodotto vettoriale esprimendolo come determinante:

$$\begin{Vmatrix} \underline{i} & j & \underline{k} \\ xa & ya & za \\ xb & yb & zb \end{Vmatrix} = \underline{i}*(ya*zb-za*yb)+j*(za*xb-xa*zb)+\underline{k}*(xa*yb-ya*xb)$$

Tre versori tra loro ortogonali, ordinati secondo la regola della mano sinistra, possono fornire un nuovo sistema di riferimento, utile per eseguire rotazioni dell'oggetto. Dati poi, nello spazio, due versori tra loro ortogonali, applicando ad essi il prodotto vettoriale, si ricava un terzo versore, che costituisce con i primi due un nuovo sistema di riferimento cartesiano.